МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МОДЕЛИРОВАНИЕ ХИМИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Методические указания к лабораторным занятиям

Ростов-на-Дону
ДГТУ
2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Любой творческий процесс – будь то изучение законов природы или разработка новой технологии, разведка месторождений или создание нового оборудования – сопровождается построением моделей. В широком смысле модель – это мысленно представляемая или материально реализованная система, которая отображая или воспроизводя объект исследования, способна замещать его так, чтобы ее изучение дало новую информацию об этом объекте. Таким образом, моделирование является методом изучения процессов или объектов, при котором исследования проводят на моделях, а результат распространяется на оригинал.

Современное химическое производство представляет собой сложную химико-технологическую систему, состоящую из большого количества аппаратов и технологических связей между ними. Следовательно, разработка и эксплуатация производства требует знания как общего подхода к проблеме, так и большого количества вопросов, непосредственно связанных с рассматриваемой технологией.

Процессы, связанные с химической технологией, очень сложны. Это прежде всего химические превращения в аппаратах различных конструкций, обусловленных особенностями протекания химических реакций, многокомпонентностью и многостадийностью многих из них. Не менее сложны и массообменные процессы, в частности процессы ректификации многокомпонентных смесей. В электрохимической технологии актуальны задачи оптимизации технологий электроосаждения. Прогресс гальванотехники требует детального изучения сцепления осадков в зависимости от подготовки поверхности покрываемого металла. В частности, необходимо изучить тончайшие слои сплавов, образующиеся в контакте чистой основы с покрытием, и исследовать влияние их состава и структуры на первоначальные стадии электрокристаллизации.

Для решения этих сложных научных и технологических задач химических производств используются методы математического моделирования. Современные специалисты должны уметь разрабатывать математические модели технологических процессов и оборудования.

В данных методических указаниях рассмотрены некоторые аспекты моделирования функциональных зависимостей, а также линейные корреляционные модели (статистические и корреляционные зависимости).

В пособии даны основные определения и формулы, приведены примеры построения моделей различного типа, приведены задания для работы в аудитории и индивидуальные расчетные задачи.

Цель предлагаемого учебного пособия помочь студентам освоить методы разработки простейших математических моделей химико-технологических процессов и закрепить материал, изучаемый в дисциплине: «Математическое моделирование химико-технологических процессов».

1 МОДЕЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

При моделировании функциональных зависимостей обычно используется метод наименьших квадратов. Этот метод является одним из методов теории ошибок для оценки неизвестных величин по результатам измерений, содержащим случайные ошибки, применяется также для приближённого представления заданной функции другими (более простыми) функциями и часто оказывается полезным при обработке наблюдений

a. Основные типы эмпирических формул Метод наименьших квадратов

В практических применениях математики очень часто встречается такая задача. Зависимость между переменными величинами выражается в виде таблицы, полученной опытным путем. Это могут быть результаты эксперимента, данные наблюдений или измерений, статистической обработки материала. Например, зависимости пути, пройденного телом, от времени; данные о цене на пшеницу и индексы акций перерабатывающих пшеницу компаний; прибыли предприятия по годам деятельности предприятия; динамики прироста массы сельскохозяйственных животных от количества кормов и т.п.

Пусть дана эмпирическая зависимость.

Таблица 1

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
У	y_1	y_2	…	y_i	…	y_n

Требуется выразить зависимость между переменными аналитически, т. е. дать формулу, связывающую между собой соответствующие значения переменных. Такая формула очень облегчает анализ изучаемой зависимости. Формулы, служащие для аналитического представления опытных данных, принято называть *эмпирическими формулами.*

Задача нахождения эмпирических формул заключается в следующем:

1) устанавливается вид зависимости $y = f(x)$, т.е устанавливется, является ли она линейной, квадратичной, логарифмической или какой-либо другой, которая содержит ряд числовых параметров a, b, c, …;

2) определяются неизвестные параметры функции, так чтобы кривая $y = f(x)$ наилучшим образом изображала зависимость, полученную в опыте.

Пусть результаты экспериментальных исследований нанесены на плоскость, паре чисел (x_i, y_i) соответствует точка с такими же координатами. Разумеется, существует множество кривых, проходящих через эти точки (см. рисунок 1).

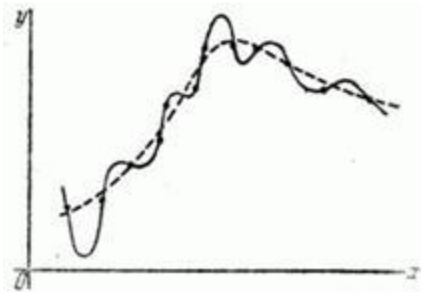

Рисунок 1.

Предполагают, что кривая истиной зависимости – наиболее гладкая кривая (пунктир), согласованная с эмпирическими данными, поэтому именно ее предпочтет исследователь. Однако, для проверки правильности вывода проводится еще ряд одновременных измерений величин x и y. Дополнительные точки наносятся на плоскость. Если они оказываются достаточно близкими к выбранной кривой, то можно считать, что вид кривой установлен.

Кроме того, во многих случаях характер зависимости между переменными величинами определяется из каких-либо теоретических соображений не математического характера (например, используя опыт предшествующих исследований). Например, известно, что при свободном падении тела в пустоте зависимость пути от времени дается формулой: $s=\frac{gt^2}{2}$.

Здесь g—коэффициент пропорциональности, являющийся ускорением силы тяжести; его значение находится из опыта.

Измеряя фактически пройденный телом путь в разные моменты времени, мы получаем таблицу соответствующих значений переменных t и s. Задача состоит теперь в том, чтобы, исходя из наблюдаемых значений, подобрать подходящее значение g. Если бы данные наблюдения были точными, то для нахождения величины g достаточно было иметь одно значение t и соответствующее значение s. Но полученные значения s содержат ошибки измерений и из каждого наблюдения будет получаться другое значение *s;* нужно подобрать значение *s* таким, чтобы оно наилучшим образом удовлетворяло всем наблюдениям.

Еще чаще приходится встречаться с более общей и более сложной задачей: в результате наблюдений получен ряд значений переменных *x* и *y,* однако истинный характер функциональной зависимости между ними остается неизвестным.

Здесь мы можем ставить перед собой цель подобрать какую-либо формулу, наилучшим образом отображающую полученные результаты. Применяются два различных метода построения таких формул. Один из них состоит в том, что строится многочлен, принимающий в заданных точках заданные значения, а именно: по двум известным точкам строится линейная функция (прямая), по трем - квадратичная (парабола) и т. п. Достоинство этого метода в том, что полученная формула в точности воспроизводит заданные значения. Такого рода формулы носят название *интерполяционных формул.*

Другой метод подбора эмпирических формул состоит в том, что по данным результатам наблюдений подбирается наиболее простая формула того или иного типа, дающая наилучшее приближение к имеющимся данным. При этом формула не воспроизводит в точности данных наблюдения, но этого и нет смысла требовать, учитывая, что полученные результаты могут содержать ошибки измерений.

Прежде чем переходить к вопросу о выборе типа подходящей формулы и подборе параметров, нужно уточнить, что следует понимать под словами «наилучшее совпадение с имеющимися данными». Этим словам можно придавать различный смысл, и тогда мы будем получать различные формулы для одних и тех же результатов наблюдений. Каждая из них будет в своем смысле «наилучшей».

Чаще всего при подборе эмпирических формул пользуются так называемым методом (*принципом) наименьших квадратов.* Он основан на том, что *из данного множества формул вида y=f(x) наилучшим образом изображающей данные значения считается та, для которой сумма квадратов отклонений наблюдаемых значений от вычисленных является наименьшей.*

Подбор параметров функции f*(x),* основанный на этом методе, называют *способом наименьших квадратов.*

Необходимо помнить, что способ наименьших квадратов применяется для подбора параметров после того, как вид функции *y* = *f(x)* определен. Если из теоретических соображений нельзя сделать никаких выводов о том, какой должна быть эмпирическая формула, то приходится руководствоваться наглядными представлениями, прежде всего графическим изображением наблюденных данных. Вид функции $y = f(x)$ выбирается таким образом, чтобы график этой функции по возможности близко напоминал расположение на графике данных наблюдения.

Покажем, как практически подбираются по способу наименьших квадратов коэффициенты для функций простейших видов. Ограничимся следующими видами функций: линейная функция ($y = ax + b$), квадратичная функция ($y = ax^2 + bx+c$), гипербола ($y = a+ \frac{b}{x}$) и показательная функция ($y= a \cdot b^x$).

b. Линейная функция

Линейная функция имеет вид: $y = ax + b$

Пусть задана таблица 2 значений переменных и соответствующие

Таблица 2

x_1	x_2	…	x_{n-1}	x_n
y_1	y_2	…	y_{n-1}	y_n

точки располагаются вблизи прямой линии (рис. 2). В этом случае нужно подбирать коэффициенты линейной функции $y = ax + b$

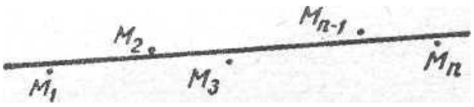

Рисунок 2.

так, чтобы сумма квадратов отклонений вычисленных значений $ax_i + b$ от наблюдаемых значений y_i т. е. величина

$$U = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \ldots + (ax_n + b - y_n)^2,$$

принимала наименьшее значение.

Сумма U= $\sum_{i=1}^{n}$ $(ax_i + b - y_i)^2$ является функцией двух переменных a и b, а поэтому она принимает минимальное значение при тех значениях a и b, при которых обращаются в нуль частные производные этой функции по каждой переменной, т. е. когда:

$$\frac{\partial U}{\partial a} = 0 \text{ и } \frac{\partial U}{\partial b} = 0$$

Находим частные производные:

$$\frac{\partial U}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)x_i = 2\left(a\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n}x_i - \sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right);$$

$$\frac{\partial U}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i) = 2\left(a\sum_{i=1}^{n}x_i + bn - \sum_{i=1}^{n}y_i\right).$$

Приравнивая каждую частную производную нулю, получаем систему двух линейных уравнений относительно a и b

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n}x_i = \sum_{i=1}^{n}x_iy_i \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i + bn = \sum_{i=1}^{n}y_i \end{cases}, \qquad (1)$$

1.3 Квадратичная функция

Квадратичная функция имеет вид: $y = ax^2 + bx + c$.

В случае квадратичной функции следует рассматривать сумму:

U= $\sum_{i=1}^{n}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$,

которая является функцией трех переменных a, b и c, а поэтому принимает минимальное значение при тех значениях a, b и c, при которых обращаются в нуль частные производные этой функции по каждой переменной, т.е когда

$$\frac{\partial U}{\partial a} = 0, \ \frac{\partial U}{\partial b} = 0 \text{ и } \frac{\partial U}{\partial c} = 0$$

Находим частные производные

$$\frac{\partial U}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)x_i^2 = 2\left(a\sum_{i=1}^{n}x_i^4+b\sum_{i=1}^{n}x_i^3+c\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i\right);$$

$$\frac{\partial U}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)x_i = 2\left(a\sum_{i=1}^{n}x_i^3+b\sum_{i=1}^{n}x_i^2+c\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right).$$

$$\frac{\partial U}{\partial c} = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i^2+bx_i+c-y_i) = 2\left(a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i+cn-\sum_{i=1}^{n}y_i\right).$$

Приравниваем каждую частную производную нулю, получаем нормальную систему:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x_i^4+b\sum_{i=1}^{n}x_i^3+c\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^3+b\sum_{i=1}^{n}x_i^2+c\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i, \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i+cn=\sum_{i=1}^{n}y_i. \end{cases}$$

1.4 Функция - гипербола

Гипербола имеет следующий вид: y = a+ b/x .

Применение метода наименьших квадратов приводит к рассмотрению суммы вида

$$U = \sum_{i=1}^{n}\left(a+\frac{b}{x_i}-y_i\right)^2$$

Являющейся функцией двух переменных параметров a и b.
Отыскание частных производных дает

$$\frac{\partial U}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n}\left(a+b\frac{1}{x_i}-y_i\right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}\left(a+b\frac{1}{x_i}-y_i\right)\frac{1}{x_i} = 2\left(a\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}+b\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i}\right)$$

Вводя условия экстремума $\frac{\partial U}{\partial a}=0$ и $\frac{\partial U}{\partial b}=0$, получаем

$$a\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}+b\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2}-\sum_{i=1}^{n}y_i\frac{1}{x_i}=0$$ или

$$a\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}+b\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2}=\sum_{i=1}^{n}y_i\frac{1}{x_i}$$ и

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a+b\frac{1}{x_i}-y_i\right)=0$$

или

$$na + b\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}=\sum_{i=1}^{n}y_i .$$

Отсюда можно записать нормальную систему для определения параметров a и b.

$$\begin{cases} na + b\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i , \\ a\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}+b\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i^2}=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{y_i}{x_i}. \end{cases}$$

1.5 Показательная функция

Показательная функция имеет вид: $y = a\cdot b^x$.

Используется логарифмическое преобразование функции $y=ab^x$ к виду $\ln y = \ln(ab^x) = x\ln b + \ln a$,
выражающему $\ln y$ как линейную функцию от x при параметрах $\ln a$ и $\ln b$. Определение этих параметров связывается здесь с отысканием по способу наименьших квадратов минимума суммы вида:

$$U = \sum_{i=1}^{n}(x_i\ln b+\ln a-\ln y_i)^2$$

Из условий

$$\frac{\partial U}{\partial \ln a}=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial U}{\partial \ln b}=0.$$

Эти условия приводят к нормальной системе, которая по структуре своей аналогична системе, полученной в первом случае для линейной функции:

$$\begin{cases} \ln b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\ln a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\ln y_i, \\ \ln b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+n\ln a=\sum\limits_{i=1}^{n}\ln y_i. \end{cases}$$

Найденные из этой системы значения $\ln a$ и $\ln b$ позволяют легко с помощью таблиц логарифмов или калькулятора определить значения a и b.

1. Примеры решения типовых задач

Пример1.

Данные о цене на нефть **x** (усл.ед) и индексе акций нефтяных компаний **y** (усл.ед) приведены в таблице 3.

Таблица 3

x_i	17,3	17,0	18,3	18,8	19,2	18,5
y_i	537	534	550	555	560	552

Предполагая, что между переменными x и y существует линейная зависимость, найти эмпирическую формулу $y=\alpha x + b$ методом наименьших квадратов.

Решение.

Перепишем таблицу в виде столбцов и проведем необходимые вычисления.

Таблица 4

n	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	17,3	537	299,29	9290,1
2	17,0	534	289,00	9078,0
3	18,3	550	334,89	10065,0
4	18,8	555	353,44	10434,0
5	19,2	560	368,64	10752,0
6	18,5	552	342,25	10212,0
$\sum$	109,1	3288	1987,51	59831,1

Составим систему уравнений :

$$\begin{cases} 1987{,}51\alpha + 109{,}1\, b = 59\,831{,}1 \\ 109{,}1\, \alpha + 6\, b = 3288 \end{cases}$$

Откуда $\alpha=11{,}946$, $b=330{,}78$, т.е

$y = 11{,}94\, x + 330{,}78$.

Пример 2.

Найти квадратичную зависимость для следующих данных. Предприятие, производящее сельскохозяйственную технику, провело опрос дилеров и получила следующие сведения о спросе Q на свою продукцию в зависимости от цены P:

Таблица 5

P = x, млн. руб	1,7	1,9	2,0	2,1
Q = y, тыс. штук	27	25	19	9

Решение.
Перепишем таблицу в виде столбцов и проведем необходимые вычисления.

Таблица 6

n	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i\ y_i$	$x_i^2\ y_i$
1	1,7	27	2,89	4,913	8,3521	45,9	78,03
2	1,9	25	3,61	6,859	13,032	47,5	90,25
3	2,0	19	4,00	8,000	16,0000	38,0	76,00
4	2,1	9	4,41	9,261	19,448	18,9	39,69
$\sum$	7,7	80	14,91	29,033	56,8323	150,3	283,97

Система линейных уравнений для определения величин α, b, c примет вид

$$\begin{cases} 56{,}8323a + 29{,}0330\,b + 14{,}9100c = 283{,}97, \\ 29{,}0330\,a + 14{,}9100\,b + 7{,}7000c = 150{,}30, \\ 14{,}9100\,a + 7{,}7000\,b + 4\,c = 80{,}00. \end{cases}$$

Решив систему, получим значения α, b, c. Функция спроса будет иметь вид

$$Q = 0{,}02\,P^2 - 16.64\,P - 6{,}67.$$

Пример 3.
Имеются следующие данные о величине пробега автомобиля x (тыс.км) и y – расходе масла (л/тыс.км):

Таблица 7

x_i	50	70	90	110	130
y_i	0,2	0,5	0,8	1,1	1,3

Полагая, что между переменными x и y существует линейная зависимость, найти эмпирическую формулу $y=ax + b$ методом наименьших квадратов.
Решение.
Перепишем таблицу в виде столбцов и проведем необходимые вычисления.

Таблица 8

n	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
1	50	0,2	2500	10
2	70	0,5	4900	35
3	90	0,8	8100	72
4	110	1,1	12100	121
5	130	1,3	16900	169
$\sum$	450	3,9	44500	407

Система нормальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} 44500a + 450b = 407 \\ 450a + 5b = 3{,}9 \end{cases}$$

Ее решения a=0,014, b = -0,48. Таким образом, линейная зависимость имеет вид: y= 0,014x – 0,48

Пример 4.
Имеются следующие данные о расходах на рекламу x (тыс. усл.ед.) и сбыте продукции (тыс. ед.):

Таблица 9

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1,6	4,0	7,4	12,0	18,0

Предполагая, что между переменными x и y существует квадратичная зависимость вида $y = ax^2 + bx + c$, найти значения параметров a, b, c методом наименьших квадратов.

Перепишем таблицу в виде столбцов и проведем необходимые вычисления.

Таблица 10

n	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	x_iy_i	$x_i^2 y_i$
1	1	1,6	1	1	1	1,6	1,6
2	2	4,0	4	8	16	8,0	16,0
3	3	7,4	9	27	81	22,2	66,6
4	4	12,0	16	64	256	48,0	196,0
5	5	18,0	25	125	625	90,0	450,0
$\sum$	15	43,0	55	225	979	169,8	680,2

Система нормальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} 979a + 225b + 55c = 680{,}2, \\ 225\,a + 55b + 15\,c = 169{,}8, \\ 55\,a + 15\,b + 5\,c = 49{,}0. \end{cases}$$

Её решения a=0,3, b=0,48, c=5,06. Искомая зависимость имеет вид:
$y= 0{,}3x^2 + 0{,}48x +5{,}06$.

Пример 5.
Имеется шесть измерений пары переменных (x,y) результаты которых приведены в таблице:

Таблица 11

x_i	1	2	3	4
y_i	0,2	0,3	1,0	1,2

Методом наименьших квадратов построить линейную зависимость y=αx + b. Сравнить полученную зависимость с зависимостью y= $\frac{1}{8}x^2$.

Решение.
Аналогично примерам 1,3 найдем уравнение линейной регрессии:
y= 0,37x – 0,25.

Сравним величины U = $\sum_{i=1}^{n}(y-y_i)^2$ для найденной линейной зависимости и зависимости y= $\frac{1}{8}x^2$. Промежуточные вычисления представим в таблице:

Таблица 12

n	x_i	y_i	$\frac{1}{8}x^2$	$0{,}37x_i - 0{,}25$	$(\frac{1}{8}x_i^2 - y_i)^2$	$(0{,}37x_i - 0{,}25 - y_i)^2$
1	1	0,2	0,125	0,12	0,005625	0,0064
2	2	0,3	0,5	0,49	0,040000	0,0361
3	3	1,0	1,125	0,76	0,015625	0,0576
4	4	1,2	2	1,23	0,640000	0,0009
∑	-	-	-	-	0,701250	0,1010

Как видно $U_{лин} < U_{кв}$, следовательно, линейная зависимость предпочтительнее.

1. Задания для работы в аудитории

I. *Имеются следующие данные о величинах x и y. Предполагая, что между x и y существует линейная зависимость, найти эмпирическую формулу*
y=ax + b методом наименьших квадратов.

Задача 1.

x – цена на товар (усл.ед.); y – уровень продаж (тыс.ед.):

Таблица 13

x_i	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0
y_i	200	160	120	90	80

Задача 2.

x – уровень потребления электроэнергии на предприятии (млн.кВт · ч); y – себестоимость единицы продукции:

Таблица 14

x_i	30	40	50	60	70
y_i	18	20	21	24	25

II. *По экспериментальным данным построить методом наименьших квадратов линейную зависимость $y=ax+b$. Сравнить полученную зависимость с альтернативной и определить, какая из них лучше соответствует экспериментальным данным.*

Задача 3.

Таблица 15

x_i	2	2,5	3	3,5	4
y_i	4,2	5,5	6,9	8	9,5

Альтернативная зависимость $y=2x+0{,}1x^2$.

Задача 4.

Таблица 16

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1,0	1,4	1,7	2,0	2,2

Альтернативная зависимость $y=\sqrt{x}$.

Задача 5.

Таблица 17

x_i	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
y_i	0,50	0,30	0,25	0,18	0,12

Альтернативная зависимость $y=2^{-x}$

1.8 Подбор эмпирических формул по выборочным данным

Зависимость плотности тока (А/дм^2) - x_i от концентрации ПАВ (мл/л) в электролитах никелирования - y_i

Таблица 18

x_i	y_i
1	5
2	4
4	3,5

Требуется подобрать тип зависимости, используя метод наименьших квадратов, исходя из условия минимума суммы квадратов отклонений. Сделать чертеж одной из наиболее подходящих зависимостей, нанести на график исходные данные.

1.Линейная зависимость: y=ax+b.

Запишем нормальную систему для определения параметров a и b зависимости: y = ax + b

$$\begin{cases} a\sum x_i^2 + b\sum x_i = \sum x_i y_i \\ a\sum x_i + bn = \sum y_i \end{cases}$$

$\Delta_i = y_{расч} - y_i$. .

Таблица 19

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	$y_{iрасч}$	Δ_i	Δ_i^2
1	1	5	1	5	4,79	0,21	0,0441
2	2	4	4	8	4,33	-0,33	0,1089
3	4	3,5	16	14	3,41	0,09	0,0081
Σ	7	12,5	21	27			0,1611

$$\begin{cases} 21a + 7b = 27 \\ 7a + 3b = 12{,}5 \end{cases}$$ a ≈ -0,46; b ≈ 5,25

y = - 0,46x + 5,25.

Вычисляем $y_{iрасч}$:

x_1= 1; $y_{1расч}$=-0,46·1+5,25=4,79

x_1= 2; $y_{2\ расч}$ =-0,46·2+5,25=4,33

x_1= 4; $y_{3\ расч}$ =-0,46·4+5,25=3,41.

2. Квадратичная зависимость: y = ax² + bx + c.

Запишем нормальную систему для определения параметров a, b и c данной зависимости:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum_{i=1}^{n} y_i, \end{cases}$$

$\Delta_i = y_{расч} - y_i$.

Таблица 20

i	x_i	y_i	$x_i\ y_i$	x_i^2	$x_i^2\ y_i$	x_i^3	x_i^4	$y_{iрасч}$	Δ_i	Δ_i^2
1	1	5	5	1	5	1	1	5	0	0
2	2	4	8	4	16	8	16	4	0	0
3	4	3,5	14	16	56	64	256	3,5	0	0
Σ	7	12,5	27	21	77	73	273			0

$$\begin{cases} 273a + 73b + 21c = 77 \\ 73a + 21b + 7c = 27 \\ 21a + 7b + 3c = 12{,}5 \end{cases} \qquad a = 0{,}25;\ b = -1{,}75;\ c = 6{,}5$$

$$y = 0{,}25x^2 - 0{,}75x + 6{,}5$$

Вычисляем $y_{iрасч}$:

$x_1=1;\ y_{1расч} = 0{,}25\cdot 1^2 – 1{,}75\ 1 + 6{,}5 = 5$

$x_2=2;\ y_{2расч} = 0{,}25\cdot 2^2 - 1{,}75\ 2 + 6{,}5 = 4$

$x_3=4;\ y_{3расч} = 0{,}25\cdot 4^2 - 1{,}75\ 4 + 6{,}5 = 3{,}5.$

3. Дробно-линейная зависимость: $y = a + \dfrac{b}{x}$.

Запишем нормальную систему для определения параметров a и b данной зависимости:

$$\begin{cases} na + b\sum \frac{1}{x_i} = \sum y_i \\ a\sum \frac{1}{x_i} + b\sum \frac{1}{x_i^2} = \sum \frac{y_i}{x_i} \end{cases}$$

$\Delta_i = y_{расч} - y_i$.

Таблица 21

i	x_i	y_i	x_i^2	$1/x_i$	$1/x_i^2$	y_i/x_i	$y_{i расч}$	Δ_i	Δ_i^2
1	1	5	1	1	1	5	5	0	0
2	2	4	4	0,5	0,25	2	4	0	0
3	4	3,5	16	0,25	0,0625	0,875	3,5	0	0
Σ	7	12,5	21	1,75	1,3125	7,875			0

$$\begin{cases} 3a + 1{,}75b = 12{,}5 \\ 1{,}75a + 1{,}3125b = 7{,}875 \end{cases} \quad a=3;\ b=2$$

$$y = 3 + \frac{2}{x}.$$

Вычисляем $y_{iрасч}$:

$$x_1=1;\ y_{1расч} = 3 + \frac{2}{1} = 5$$

$$x_2=2;\ y_{2расч} = 3 + \frac{2}{2} = 4$$

$$x_3=4;\ y_{3расч} = 3 + \frac{2}{4} = 3{,}5$$

4. Показательная зависимость: $y = a \cdot b^x$

Запишем нормальную систему для определения параметров a и b данной зависимости:

$$\begin{cases} \ln b \sum x_i^2 + \ln a \sum x_i = \sum x_i \ln y_i \\ \ln b \sum x_i + \ln a \cdot n = \sum \ln y_i \end{cases}$$

$\Delta_i = y_{расч} - y_i$.

Таблица 22

i	x_i	y_i	x_i^2	$\ln y_i$	$x_i \ln y_i$	$y_{iрасч}$	Δ_i	Δ_i^2
1	1	5	1	1,61	1,61	4,86	0,14	0,0196
2	2	4	4	1,39	2,78	4,37	-0,37	0,1369
3	4	3,5	16	1,25	5	3,54	-0,04	0,0016
Σ	7	12,5	21	4,25	9,39			0,1581

$$\begin{cases} 21\ln b + 7\ln a = 9{,}39 \\ 7\ln b + 3\ln a = 4{,}25 \end{cases} \quad \ln b=-0{,}11;\ b=e^{-0{,}11}\approx 0{,}9;\quad \ln a=1{,}68;\ a=e^{1{,}68}\approx 5{,}4$$

$$y = 5{,}4 \cdot 0{,}9^x$$

Вычисляем $y_{iрасч}$:

$$x_1=1;\ y_{1расч} = 5{,}4 \cdot 0{,}9^1 \approx 4{,}86$$

$x_2=2$; $y_{2расч} = 5,4\cdot 0,9^2 \approx 4,37$

$x_3=4$; $y_{3расч} = 5,4\cdot 0,9^4 \approx 3,54$

Суммы квадратов отклонений расчетных данных от теоретических данных для найденных зависимостей записаны в табл.23.

Таблица 23

i	Зависимость	$\sum\Delta_i^2$
1	$y=-0,46x+5,25$	0,1611
2	$y=0,25x^2-0,75x+6,5$	0
3	$y=3+\frac{2}{x}$	0
4	$y=5,4\cdot 0,9^x$	0,1581

ВЫВОД: Наилучшим образом подходит дробно-линейная зависимость ($y=3+\frac{2}{x}$) и квадратичная зависимость ($y=0,25x^2-0,75x+6,5$).

Сделаем чертеж одной из наиболее подходящих зависимостей, нанесем на график исходные данные.

1.9 Индивидуальные расчетные задания

В ходе исследования получены следующие данные:
Теплота растворения некоторой соли от температуры окружающей среды. по, где x – теплота растворения некоторой соли - ΔH, кДж/моль; y – температура окружающей среды - T,° C.
Требуется подобрать тип зависимости, используя метод наименьших квадратов, исходя из условия минимума суммы квадратов отклонений. Сделать чертеж одной из наиболее подходящих зависимостей, нанести на график исходные данные.

№1

x_i	y_i
-1	0
1	2
2	1.5

№2

x_i	y_i
-1	-2
1	4
3	2

№3

x_i	y_i
-1	3
1	-1
2	0

№4

x_i	y_i
-1	-1
1	3
0.5	2

№5

x_i	y_i
-2	-4
-1	-1
1	5

№6

x_i	y_i
-1	0
1	2
2	1.5

№7

x_i	y_i
-1	-2
1	0
2	1

№8

x_i	y_i
-1	2
0.5	2
1	2

№9

x_i	y_i
-1	0.5
1	2
2	4

№10

x_i	y_i
-2	1
-1	0
1	4

№11

x_i	y_i
-1	-1
1	1
2	5

№12

x_i	y_i
-1	3
0.5	0
1	1

№13

x_i	y_i
-1	4
0.5	1
1	2

№14

x_i	y_i
-1	1
0	2
1	3

№15

x_i	y_i
-2	-5/2
-1	-3/2
0	-1/2

№16

x_i	y_i
-1	-2
0	-1
1	2

№17

x_i	y_i
1/2	4
1	7
-1	5

№18

x_i	y_i
-1	-4
1	6
2	2,5

№19

x_i	y_i
-1	2
1	-1
2	0

№ 20

x_i	y_i
0	3
2	4
3	5

2. ЛИНЕЙНЫЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ МОДЕЛИ

2.1 Статистическая и корреляционная зависимости

Многие задачи химических производств требуют установить и оценить зависимость изучаемой случайной величины Y от одной или нескольких других величин.

Две случайные величины могут быть связаны либо функциональной зависимостью, либо статистической зависимостью, либо могут быть независимыми.

Строгие функциональные зависимости изучаются в курсе математического анализа. В математической статистике рассматриваются «размытые» статистические зависимости.

Зависимость между величинами X и Y, состоящая в том, что каждому значению одной величины (X) соответствует не одно значение, а распределение значений другой величины, называется *статистической зависимостью*.

Корреляционной зависимостью называется *функциональная* зависимость между значениями одной случайной величины и условными средними значениями другой случайной величины.

Пример. Пусть Y – урожай зерна, X –количество удобрений. С одинаковых по площади участков земли при равных количествах внесённых удобрений снимают разный урожай, т.е. Y не является однозначной функцией от X. Это объясняется влиянием случайных факторов влияющих на урожай(осадки, температура воздуха и др.). Однако *средний урожай* является функцией от количества удобрений, т.е. Y связан с X корреляционной зависимостью.

2.2 Корреляционная таблица

Пусть имеются два ряда выборочных значений зависимых между собой случайных величин X и Y.

При небольшом числе выборочных значений случайных величин X и Y их записывают в виде таблицы наблюдений.

Таблица 24

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
Y	y_1	y_2	y_3	…	y_n

При большом числе выборочных значений одно и то же значение X, может встретиться n_x раз, а значение Y – n_y раз, пара чисел (X,Y) может наблюдаться n_{xy} раз. Таблица, в которой результаты наблюдений записаны в порядке возрастания с указанием частоты, называется корреляционной. Поясним устройство корреляционной таблицы.

Пример. Для исследования зависимости объёма производства Y от основных фондов (X, млн.р.), получены выборочные статистические данные по предприятиям за год.

Таблица 25

Y	X					n_y
	12	17	22	32	37	
200	3	-	1	-	-	4
220	-	5	8	1	-	14
250	2	1	-	2	1	6
n_x	5	6	9	3	1	n=24

В первой строке таблицы указаны наблюдаемые значения (12; 17; 22; 32; 37) признака (случайной величины) X, в первом столбце указаны наблюдаемые значения (200; 220; 250) признака Y. На пересечении строк и столбцов находятся частоты n_{xy} наблюдаемых пар значений признаков. Например, частота 8 указывает, что пара чисел (22; 220) наблюдалась 8 раз. Прочерк означает, что соответствующая пара чисел, например, (17; 200), не наблюдалась. Все частоты помещены в прямоугольник, стороны которого проведены жирными отрезками.

В последнем столбце записаны суммы частот строк. Например, сумма частот первой строки «жирного» прямоугольника равна n_y=3+1=4; это число указывает, что значение признака Y, равное 200 наблюдалось 4 раза. В последней строке записаны суммы частот столбцов. Например, число 5 указывает, что значение признака X, равное 12, наблюдалось 5 раз. В клетке, расположенной в нижнем правом углу таблицы 13, помещена сумма всех частот (общее число всех наблюдений).

Очевидно, $\sum n_x = \sum n_y = n$. В нашем примере $\sum n_x = 5+6+9+3+1=24$ и $\sum n_y = 4+14+6=24$.

2.3 Выборочные уравнения регрессии

Условным средним $\bar{y}_x$ называется среднее арифметическое наблюдавшихся значений Y, соответствующих X=x.

Пример. На каждый из 3-х одинаковых участков земли внесены по 2-е единицы удобрения и сняли соответственно 5; 7; 12 единиц зерна. Изучается зависимость между случайными величинами X и Y. Каждому значению X соответствует несколько значений Y: $x_1=2$; $y_1=5$; $y_2=7$; $y_3=12$. Среднее арифметическое этих чисел (средний урожай): $\bar{y}_{x_1} = \bar{y}_2 = \frac{5+7+12}{3} = 8$. Число $\bar{y}_{x_1}$ является условным средним.

Аналогично определяется условное среднее $\bar{x}_y$. *Условным средним* $\bar{x}_y$ называется среднее арифметическое наблюдавшихся значений X, соответствующих Y=y.

Корреляционной зависимостью y от x является функциональная зависимость: $\bar{y}_x = f(x)$. Функцию $f(x)$ называют выборочной регрессией Y на X, а её график – выборочной линией регрессии Y на X. А уравнение $\bar{y}_x = f(x)$ называется выборочным уравнением регрессии Y на X.

Корреляционной зависимостью x от y называется функциональная зависимость: $\bar{x}_y = \varphi(x)$. Функцию $\varphi(x)$ называется выборочной регрессией X по Y, уравнение называется выборочным уравнением регрессии X на Y, а её график называется выборочной линией регрессии.

2.4 Основные задачи теории корреляции

1. Установить зависимость между случайными величинами в виде формулы.
2. Оценить тесноту (силу) корреляционной связи.

Поясним последнюю задачу. Теснота корреляционной зависимости, например, Y от X оценивается по величине рассеяния значений Y вокруг условного среднего $\bar{y}_x$. Большое рассеяние свидетельствует о слабой зависимости Y от X, либо об отсутствии зависимости. Малое рассеяние указывает на наличие сильной зависимости.

2.5 Отыскание параметров выборочного уравнения прямой линии регрессии по не группированным данным

Пусть изучается система количественных признаков (X,Y). В результате n независимых опытов получены n пар чисел (x_1, y_1), (x_2, y_2),… (x_n, y_n), записанных в виде таблицы 12(несгруппированные выборочные данные).

Найдём выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X $\overline{y}_x = kx + b$. Угловой коэффициент прямой линии регрессии Y на X называют выборочным *коэффициентом регрессии* Y на X и обозначают ρ_{yx}. Выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X принимает вид:

$$\overline{y}_x = \rho_{yx} x + b. \qquad (14)$$

Разности $Y_i - y_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$, называются отклонениями выборочных значений от теоретических значений признака Y. Y_i – вычисленная по уравнению (14) ордината, соответствующая наблюдаемому значению x_i; y_i – наблюдаемая выборочная ордината, соответствующая значению x_i.

Подберём параметры ρ_{yx} и b так, чтобы сумма квадратов отклонений была минимальной (в этом состоит сущность метода наименьших квадратов). Каждое отклонение зависит от отыскиваемых параметров, поэтому сумма квадратов отклонений есть функция F этих параметров (временно вместо ρ_{yx} будем писать ρ).

$$F(\rho, b) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - y_i)^2 \quad \text{или} \quad F(\rho, b) = \sum_{i=1}^{n} (\rho x_i + b - y_i)^2.$$

Для отыскания минимума этой функции найдем и приравниваем к нулю соответствующие частные производные:

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = 2\sum_{i=1}^{n} (\rho x_i + b - y_i) x_i = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} (\rho x_i + b - y_i) = 0.$$

Выполнив преобразования, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \rho_{yx} \left(\sum x^2\right) + b \sum x = \sum xy \\ \rho_{yx} \sum x + nb = \sum y \end{cases}$$

Решив эту систему, найдём оптимальные значения параметров:

$$\rho_{yx} = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2};$$

$$b = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}.$$

Аналогично можно найти параметры выборочного уравнения прямой линии регрессии X на Y $\overline{x}_y = \rho_{xy} + c$:

$$\rho_{xy} = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2}; \qquad c = \frac{\sum y^2 \sum x - \sum y \sum xy}{n\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2}.$$

Пример. Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X по данным пяти наблюдений (n=5):

Таблица 26

x	1,00	1,50	3,00	4,50	5,00
y	1,25	1,40	1,50	1,75	2,25

Составим расчётную таблицу:

Таблица 27

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1,00	1,25	1,00	1,250
1,50	1,40	2,25	2,100
3,00	1,50	9,00	4,500
4,50	1,75	20,25	7,875
5,00	2,25	25,00	11,250
$\sum x_i = 15$	$\sum y_i = 8,15$	$\sum x_i^2 = 57,50$	$\sum x_i y_i = 26,975$

Вычислим значения параметров по приведенным выше формулам.

[illegible]

[illegible] Уравнение регрессии имеет вид: [illegible]

Для того, что бы получить представление, насколько хорошо вычисленные по этому уравнению значения Y_i согласуются с наблюдаемыми значениями y_i, найдём отклонения Y_i-y_i. Результаты вычислений приведены в таблице 28.

Таблица 28

x_i	Y_i	y_i	Y_i-y_i
1,00	1,226	1,25	-0,024
1,50	1,327	1,40	-0,073
3,00	1,630	1,50	0,130
4,50	1,933	1,75	0,183
5,00	2,034	2,25	-0,216

Видно, что все отклонения достаточно малы. Это объясняется малым числом наблюдений.

2.7 Отыскание параметров выборочного уравнения прямой линии регрессии по сгруппированным данным

Выше была получена система уравнений для определения параметров уравнения прямой линии регрессии Y на X.

$$\begin{cases} \rho_{yx}\left(\sum x^2\right) + b\left(\sum x\right) = \sum xy; \\ \rho_{yx}\left(\sum x\right) + nb = \sum y. \end{cases} \qquad (15)$$

Предполагалось, что значения x_i и соответствующие им значения y_i наблюдались по одному разу.

Пусть получено большое число данных, среди которых есть повторяющиеся и пусть они сгруппированы в корреляционной таблице. Запишем систему так, чтобы она отражала данные корреляционной таблицы. Воспользуемся тождествами: $\sum x = n\bar{x}$ (следствие из $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$); $\sum y = n\bar{y}$ (следствие из $\bar{y} = \frac{\sum y}{n}$);

$\sum x^2 = n\overline{x^2}$ (следствие из $\overline{x^2} = \frac{\sum x^2}{n}$); $\sum xy = \sum n_{xy} xy$ (учтено, что пара чисел (x,y) наблюдались n_{xy} раз).

Подставив правые части тождеств в (44), сократив на n, получим:

$$\begin{cases} \rho_{yx}\left(n\overline{x^2}\right) + b\left(n\bar{x}\right) = \sum n_{xy} xy; \\ \rho_{yx}\left(\bar{x}\right) + b = \bar{y}. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдём коэффициент регрессии Y на X ρ_{yx}:

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\left(\overline{x^2} - \left(\bar{x}\right)^2\right)}.$$

Параметр «b» найдём из второго уравнения системы (15):

$$b = \bar{y} - \rho_{yx}\bar{x}.$$

Подставив правую часть последнего равенства в уравнение $\bar{y}_x = \rho_{yx}x + b$, получим:

$\bar{y}_x - \bar{y} = \rho_{yx}\left(x - \bar{x}\right)$ - уравнение прямой линии регрессии Y на X.

Аналогично можно найти коэффициент регрессии X на Y:

$$\rho_{xy} = \frac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\left(\overline{y^2} - \left(\bar{y}\right)^2\right)}.$$

Учитывая что $\bar{x}_y = \rho_{xy}y + C$, где $C = \bar{x} - \rho_{xy}\bar{y}$, получим уравнение прямой линии регрессии X на Y:

$$\bar{x}_y - \bar{x} = \rho_{xy}(y - \bar{y}).$$

2.8 Выборочный коэффициент корреляции

В случае положительных коэффициентов регрессии ρ_{yx}, корреляцию называют положительной, в этом случае прямые регрессии образуют острые углы с соответствующими осями координат (рис.1). Прямая регрессии Y на X имеет коэффициент регрессии $\rho_{yx} = tg\alpha$, где α – острый угол, образованный прямой (1) с осью Ox. Прямая регрессии X на Y имеет коэффициент регрессии $\rho_{xy} = tg\beta$, где β – острый угол, образованный прямой (2) с осью Oy.

При отрицательных коэффициентах регрессии корреляцию называют отрицательной, а прямые регрессии образуют с соответствующими осями тупые углы.

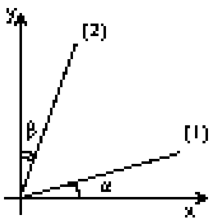

Рисунок 3 Прямые регрессии: Y на X (1), X на Y (2)

О тесноте связи между признаками X и Y можно судить по величине угла, образованного прямыми регрессии. Чем меньше этот угол, тем теснее корреляционная зависимость между X и Y. При слиянии этих двух прямых в одну между X и Y имеет место не статистическая зависимость, а линейная *функциональная* зависимость.

В качестве меры тесноты линейной корреляционной зависимости принимается выборочный *коэффициент корреляции* :

$$r_B = \pm\sqrt{\rho_{yx}\rho_{xy}} = \pm\sqrt{tg\alpha \cdot tg\beta} \qquad (16)$$

Свойства выборочного коэффициента корреляции:

и Значения коэффициента корреляции изменяются на множестве $[-1;1] = \{r_B : -1 \le r_B \le 1\}$.

и Чем больше $|r_B|$, тем теснее связь между изучаемыми количественными признаками.

и Если $|r_B| = 1$, то корреляционная зависимость является функциональной.

и Если $r_B = 0$, то между изучаемыми признаками нет линейной корреляционной зависимости, что не исключает существование какоголибо другого вида корреляционной зависимости (параболической, показательной и др.).

Если $|r_B|\sqrt{n-1} \geq 3$, то связь между случайными величинами *достаточно вероятна*. В случае если связь между случайными величинами маловероятна, нахождение уравнений линий регрессии не имеет смысла.

Рассмотрим некоторые формулы, используемые для вычисления коэффициентов регрессии и коэффициента корреляции.

$$r_B = \frac{\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n\sigma_x\sigma_y};$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}; \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n};$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n}}; \qquad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (y-\bar{y})^2}{n}};$$

$$r_B = \frac{\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum (x-\bar{x})^2}\sqrt{\sum (y-\bar{y})^2}};$$

$$\rho_{yx} = \frac{\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sum (x-\bar{x})^2}; \qquad \rho_{xy} = \frac{\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sum (y-\bar{y})^2}.$$

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\left(\overline{x^2} - (\bar{x})^2\right)}; \quad \rho_{xy} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\left(\overline{y^2} - (\bar{y})^2\right)};$$

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_x^2}; \qquad \rho_{xy} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\left(\overline{y^2} - (\bar{y})^2\right)};$$

$$r_B = \frac{\sum n_{xy}xy - n\overline{xy}}{n\sigma_x\sigma_y}$$

$$\rho_{yx} = r_B\frac{\sigma_y}{\sigma_x}; \quad \rho_{xy} = r_B\frac{\sigma_x}{\sigma_y}.$$

2.9 Образцы выполнения типовых расчетных заданий теории корреляции

Задание № 1. В результате проведения физико-механических исследований композиционных электрохимических покрытий (КЭП) на основе никеля получены следующие зависимости внутренних напряжений Р (МПа) - x_i от толщины покрытий δ (мкм) – y_i в электролитах никелирования различных составов.
Результаты измерений - в следующей таблице:

x_i	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115
y_i	23	27	28	29	32	32	33	35	38	43

По имеющимся выборочным данным *выполнить следующие действия*.

1. Вычислить выборочный коэффициент корреляции и найти выборочное уравнение линейной регрессии X на Y и Y на X:

а) методом выборочной средней; б) методом наименьших квадратов.

2. Построить график полученных зависимостей.

1. Расчитаем выборочный коэффициент корреляции:

а) методом выборочной средней.

Найдём характеристики выборочных распределений:

Выборочные средние:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n};\quad \bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n};\qquad \bar{x}=\frac{700}{10}=70;\quad \bar{y}=\frac{320}{10}=32$$

Средние квадратические отклонения:

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}};\quad \sigma_y=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{n}}$$

Коэффициент корреляции найдем по формуле: $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$.

Расчёт сумм, входящих в формулы сгруппируем в таблицу 29.

Таблица 29

i	x_i	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	y_i	$y_i-\bar{y}$	$(y_i-\bar{y})^2$	$(x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})$
1	25	-45	2025	23	-9	81	405
2	35	-35	1225	27	-5	25	175
3	45	-25	625	28	-4	16	100
4	55	-15	225	29	-3	9	45
5	65	-5	25	32	0	0	0
6	75	5	25	32	0	0	0
7	85	15	225	33	1	1	15
8	95	25	625	35	3	9	75
9	105	35	1225	38	6	36	210
10	115	45	2025	43	11	121	495
Σ	700	0	8250	320	0	298	1520

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{8250}{10}}=28{,}72;\quad \sigma_y=\sqrt{\frac{298}{10}}=5{,}46$$

Подставляя вычисленные значения в выражения для r, имеем:

$$r=\frac{1520}{\sqrt{8250}\cdot\sqrt{298}}=0{,}97$$

Вывод: между длинной ствола и длинной его части без ветвей существует тесная положительная линейная корреляционная зависимость.

Уравнение регрессии Y на X:

$$\bar{y}_x-\bar{y}=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\cdot(x-\bar{x});\quad \bar{y}_x-32=0{,}97\cdot\frac{5{,}46}{28{,}72}\cdot(x-70);\quad \bar{y}_x-32=0{,}18x-12{,}9$$

$$\bar{y}_x=0{,}18x+19{,}0$$

Уравнение регрессии X на Y:

$$\bar{x}_y-\bar{x}=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\cdot(y-\bar{y});\quad \bar{x}_y-70=0{,}97\cdot\frac{28{,}72}{5{,}46}\cdot(y-32);\quad \bar{x}_y-70=5{,}1\cdot y-163{,}2$$

$$\bar{x}_y=5{,}1y-93{,}2$$

б) методом наименьших квадратов.

$y=\rho_{yx}x+b$, $x=\rho_{xy}y+d$,

$$\begin{cases} \rho_{yx}\left(\sum x^2\right) + b\sum x = \sum xy \\ \rho_{yx}\sum x + nb = \sum y \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho_{xy}\left(\sum y^2\right) + d\sum y = \sum xy \\ \rho_{xy}\sum y + nd = \sum x \end{cases}$$

Обозначим $\rho_{yx}=\alpha$, $\rho_{xy}=c$, тогда $y=\alpha x+b$, $x=cy+d$.
Составим расчётную таблицу:

Таблица 30

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
1	25	23	625	529	575
2	35	27	1225	729	945
3	45	28	2025	784	1260
4	55	29	3025	841	1595
5	65	32	4225	1024	2080
6	75	32	5625	1024	2400
7	85	33	7225	1089	2805
8	95	35	9025	1225	3325
9	105	38	11025	1444	3990
10	115	43	13225	1849	4945
Σ	700	320	57250	10538	23920

$$\begin{cases} 57250a + 700b = 23920 \\ 700a + 10b = 320 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5725a + 70b = 2392 \\ 70a + b = 32 \end{cases}$$

$\Delta = \begin{vmatrix} 5725 & 70 \\ 70 & 1 \end{vmatrix}$ =5725-4900=825; $\Delta_a = \begin{vmatrix} 2392 & 70 \\ 32 & 1 \end{vmatrix}$ =2392-2240=152;

$\Delta_b = \begin{vmatrix} 5725 & 2392 \\ 70 & 32 \end{vmatrix}$ =183200-167440=15760; $a = \dfrac{\Delta_a}{\Delta}$ =0,184; $b = \dfrac{\Delta_b}{\Delta}$ =19,10.

Таким образом, уравнение регрессии Y на X найдено: $\bar{y}_x = 0{,}18x + 19{,}1$
Аналогично найдем уравнение регрессии X на Y.

$$\begin{cases} 10538c + 320d = 23920 \\ 320c + 10d = 700 \end{cases}$$

Уравнение регрессии X на Y : $\bar{x}_y = 5{,}1y - 93{,}2$

2.Построение графиков полученных зависимостей.

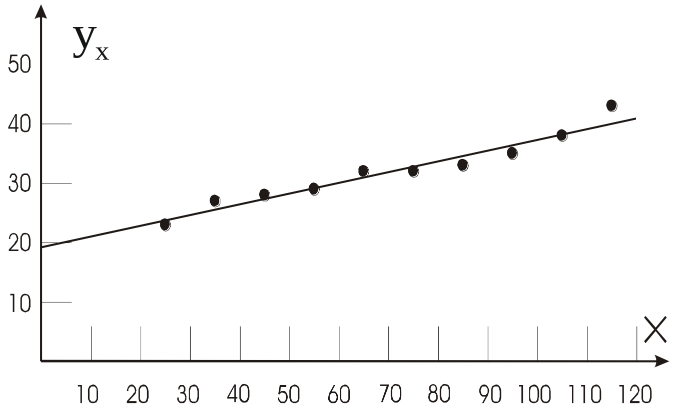

Рисунок 4 Линия регрессии Y на X: $\bar{y}_x = 0,18x + 19,9$

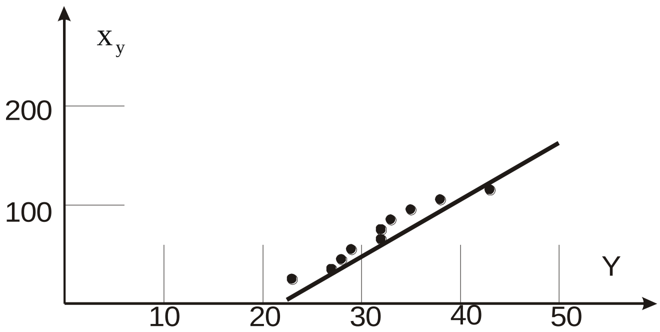

Рисунок 5 Линия регрессии X на Y: $\bar{x}_y = 5,1y - 92,3$

Задание № 2. Дана корреляционная таблица с двумя входами. В таблице приведены данные по урожайности (Y, ц/га) и по глубине орошения (X, см).

Таблица 31

y	x					
	4	9	14	19	24	29
8	3	3	-	-	-	-
18	-	5	4	-	-	-
28	-	-	40	2	8	-
38	-	-	5	10	6	-
48	-	-	-	4	7	3

Найти выборочный коэффициент корреляции, оценить вероятность связи, найти уравнения линейной регрессии **X** на **Y** и **Y** на **X** (**n**=100).

По данным корреляционной таблицы вычислим выборочный коэффициент корреляции. Вычисления можно упростить, перейдя к *условным вариантам*:

$$u_i = \frac{x_i - C_1}{h}; \qquad v_i = \frac{y_i - C_2}{h},$$

где C_1, C_2- ложные нули (новое начало отсчета), варианты, соответствующие наибольшей частоте (моды).

В этом случае выборочный коэффициент корреляции вычисляется по формуле (переход к условным вариантам не изменяет величины $\mathbf{r_B}$):

$$r_B=\frac{\sum n_{uv}uv-n\bar{u}\bar{v}}{n\sigma_u\sigma_v}.$$

Величины вычисляются по известным формулам:

$$\bar{u}=\frac{\sum n_u u}{n};\ \bar{v}=\frac{\sum n_v v}{n};\ \ \sigma_u=\sqrt{\overline{u^2}-(\bar{u})^2};\ \overline{u^2}=\frac{\sum n_u u^2}{n};$$

$$\sigma_v=\sqrt{\overline{v^2}-(\bar{v})^2};\ \ \overline{v^2}=\frac{\sum n_v v^2}{n}.$$

Величину $\sum n_{uv}uv$ вычислим применяя *метод четырёх полей*.

Название метода связано с тем, что строка и столбец, пересекающиеся в клетке, содержащей наибольшую частоту, делят корреляционную таблицу на 4 части, которые называют *полями*. Поля нумеруются так, как указано в таблице 32.

Таблица 32

	U		
		0	
	I		II
0		наибольшая частота	
	III		IV

Рассмотрим метод на конкретном примере. Дополним таблицу 31 частотами $\mathbf{n_x}$, $\mathbf{n_y}$:

Таблица 33

	X						
Y	4	9	14	19	24	29	n_y
8	3	3	-	-	-	-	6
18	-	5	4	-	-	-	9
28	-	-	40	2	8	-	50
38	-	-	5	10	6	-	21
48	-	-	-	4	7	3	14
n_x	3	8	49	16	21	3	100

$\mathbf{C_1}$=14; $\mathbf{h_1}$=5; $\mathbf{C_2}$=28; $\mathbf{h_2}$=10, **h**- шаг, **C**- ложные нули.

$$u=\frac{x-C_1}{h_1};\quad u=\frac{x-14}{5};\quad v=\frac{y-C_2}{h_2};\quad v=\frac{y-28}{10}.$$

Построим корреляционную таблицу в условных вариантах.

Таблица 34

V	U						
	-2	-1	0	1	2	3	n_v
-2	3	3	-	-	-	-	6
-1	-	5	4	-	-	-	9
0	-	-	40	2	8	-	50
1	-	-	5	10	6	-	21
2	-	-	-	4	7	3	14
n_u	3	8	49	16	21	3	100

Найдём $\bar{u},\bar{v},\sigma_u,\sigma_v$:

$$\bar{u}=\frac{\sum n_u u}{n};\quad \bar{u}=\frac{[illegible]}{100}=[illegible]$$

$$\bar{v}=\frac{\sum n_v v}{n};\quad \bar{v}=\frac{[illegible]}{100}=[illegible]$$

$$\sigma_u=\sqrt{\overline{u^2}-(\bar{u})^2};\quad \overline{u^2}=\frac{\sum n_u u^2}{n};$$

$$\overline{u^2}=\frac{[illegible]}{100}=[illegible]$$

$$\sigma_u=\sqrt{[illegible]}=[illegible]$$

Аналогично находим: $\sigma_v=1{,}01$

Построим схематическую расчётную таблицу *метода четырёх полей*.

1. Для этого разобьем таблицу на четыре поля, в соответствии с таблицей 8.2.

2. Найдём произведения пар вариант **U** и **V** и поместим их в верхние правые углы клеток, содержащих соответственные частоты. Например, **U**=-2 и **V**=-2 наблюдали 3 раза. Произведение **UV**=4 помещаем в верхний правый угол клетки, содержащий частоту.

Заполним подобным образом клетки для всех четырёх полей.

3. Найденное произведение **UV** и число **n** и **v** из каждой клетки перемножают и результат складывают. В итоге получим искомое $\sum n_{uv}uv$. Для удобства контроля вычислений найденные произведения $n_{uv}uv$ суммируют отдельно по каждому полю. Причём, подсчёт следует вести и по строкам и по столбцам каждого поля: сумму $n_{uv}uv$ строки поля помещают в тот из дополнительных столбцов, помещённых справа, который

соответствует номеру поля чисел, которые складывались. Аналогично – для строк.

4. Суммы чисел отдельно по каждому полю записыват в правом нижнем углу таблицы в четырёх итоговых клетках.

Схематическая расчётная таблица *метода четырёх полей*.

Таблица 35

	-2	-1	0	1	2	3	I	II
-2	3^{4}	3^{2}	-	-	-	-	18	-
-1	-	5^{1}	-	-	-	-	5	-
0	-	-	-	2	8	-	III	IV
1	-	-	-	10^{1}	6^{2}	-	-	22
2	-	-	-	4^{2}	7^{4}	3^{6}	-	54
I	12	11	II	-	-	-	23	-
III			IV	18	40	18	-	76

$$\sum n_{uv}uv = 23 + 76 = 99;$$

$$r_B = \frac{\sum n_{uv}uv - n\bar{u}\bar{v}}{n\sigma_u\sigma_v}; \qquad r_B = \frac{99 - 100\cdot 0{,}5\cdot 0{,}28}{100\cdot 1{,}09\cdot 1{,}01} = 0{,}76.$$

Оценим *вероятность связи*:

$$|0{,}76|\sqrt{100-1} \geq 3; \qquad 7{,}6 \geq 3.$$

Так как $|r_B|\sqrt{n-1} \geq 3$, то *связь достаточно вероятна*.

Вернемся к исходным признакам:

$$\bar{x} = \bar{u}h_1 + C_1; \; \bar{y} = \bar{v}h_2 + C_2;$$

$$\bar{x} = 0{,}5\cdot 5 + 13{,}1 = 14{,}6; \; \bar{y} = 0{,}28\cdot 10 + 28 = 30{,}8;$$

$$\sigma_x = h_1\sigma_u; \; \sigma_y = h_2\sigma_v;$$

$$\sigma_x = 5\cdot 1{,}09 = 5{,}45; \; \sigma_y = 10\cdot 1{,}01 = 10{,}1.$$

Найдём уравнения линейной регрессии.

Уравнение **y** на **x**: $\bar{y}_x - \bar{y} = r_B\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$

$$\bar{y}_x - 38{,}09 = 0{,}76\cdot\frac{10{,}1}{5{,}45}(x - 14{,}6); \qquad \bar{y}_x - 38{,}09 = 1{,}41x - 20{,}6;$$

$$\bar{y}_x = 1{,}41x + 17{,}3.$$

Уравнение **x** на **y**: $\bar{x}_y - \bar{x} = r_B\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y})$;

$$\bar{x}_y - 16{,}09 = 0{,}76\cdot\frac{5{,}45}{10{,}1}(y - 38{,}3); \qquad \bar{x}_y - 16{,}09 = 0{,}41y - 11{,}6;$$

$$\bar{x}_y = 0{,}41y + 4{,}0.$$

Задание № 3. Рассматривается вариант взаимосвязи между курсом Y (отношения европейской валюты евро (EUR) к доллару США (USD)) и X (отношения экспорта европейского союза в США (Exp) к импорту из США (Imp)).

$Y = \frac{EUR}{USD}$; $X = \frac{Exp}{Imp}$.

Данные основанные на историческом опыте 79 недель представлены в корреляционной таблице 36.

Таблица 36

	Y			
X	0,5	0,6	0,7	0,8
0,5	0	2	0	8
0,6	0	4	2	9
0,7	2	12	3	1
0,8	21	14	0	0
0,9	1	0	0	0

Вычислить выборочный коэффициент корреляции. Установить вероятность связи между величинами Y, X и определить уравнения линейной регрессии

Y на X и X на Y.

1. Дополним данную таблицу частотами $\mathbf{n_x}$, $\mathbf{n_y}$.

Используя таблицу 36 вычисляем $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{x}^2$, $\bar{y}^2$ и $\overline{xy}$

Таблица 37

	Y				
X	0,5	0,6	0,7	0,8	n_x
0,5	0	2	0	8	10
0,6	0	4	2	9	15
0,7	2	12	3	1	18
0,8	21	14	0	0	35
0,9	1	0	0	0	1
n_y	24	32	5	18	79

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i}{n};\quad \bar{x^2}=\frac{\sum n_i x_i^2}{n};\quad \bar{y}=\frac{\sum_{j=1}^{n} n_j y_j}{n};\quad \bar{y^2}=\frac{\sum n_j y_j^2}{n};\quad \bar{xy}=\frac{\sum n_{ij} x_i y_j}{n}.$$

$$\bar{x}=\frac{[illegible]}{79}\approx 0[illegible]$$

$$\bar{y}=\frac{[illegible]}{79}\approx 0[illegible]$$

$$\bar{x^2}=\frac{[illegible]}{79}\approx 0,[illegible]$$

$$\bar{y^2}=\frac{[illegible]}{79}\approx 0[illegible]$$

$$\bar{xy}=\frac{[illegible]}{79}\approx 0,[illegible]$$

2. Определим дисперсии:

$$D_x=\frac{\sum_{i=1}^{n} x^2}{n}-(\bar{x})^2;\quad D_y=\frac{\sum_{j=1}^{n} y^2}{n}-(\bar{y})^2;\quad D_x=\bar{x^2}-(\bar{x})^2;\quad D_y=\bar{y^2}-(\bar{y})^2$$

$D_x = 0,5054 - (0,7025)^2 \approx 0,0119;$ $D_y = 0,3986 - (0,6215)^2 \approx 0,0123.$

3. Определим средние квадратичные отклонения:

$\sigma_x=\sqrt{D_x};\quad \sigma_x=\sqrt{0,0119}\approx 0,109;\quad \sigma_y=\sqrt{D_y};\quad \sigma_y=\sqrt{0,0123}\approx[illegible]$

4. Определим ковариацию (корреляционный момент):

$$k_{xy}=\frac{\sum xy}{n}-\bar{x}\bar{y};$$

$$k_{xy}=\bar{xy}-\bar{x}\cdot\bar{y};$$

$$k_{xy}=0,[illegible].$$

5. Определим коэффициент корреляции.

Выборочным *корреляционным моментом или ковариацией* $\mathbf{K_{xy}}$ называется число определяемое формулой:

$$K_{xy}=M(XY)-M(X)M(Y),$$

где **M(X)**, **M(Y)** – математические ожидания **X** и **Y**.

Корреляционный момент характеризует *силу связи* между **X** и **Y**.

$$r_B = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{M(xy) - M(x)M(y)}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Заменив числовые характеристики их оценками, получим:

$$r_B = [illegible]$$

$$r_B = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\sigma_x \sigma_y}, \text{где } \overline{xy} = \frac{\sum n_{xy} x y}{n}.$$

Учитывая, что $\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y} = \frac{1}{n}\sum [illegible]$

Получаем:

$$r_B = \frac{k_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}; \qquad r_B = \frac{-0{,}009}{[illegible]} \approx 0[illegible]$$

Если $|r_B| \cdot \sqrt{n-1} \geq 3$, то связь между случайными величинами X и Y достаточно вероятна. В данном случае $|-0{,}[illegible]| \cdot \sqrt{[illegible]} [illegible]$. Значит связь между случайными величинами X и Y вероятна.

Уравнение регрессии **Y** на **X**: $\overline{y}_x - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x})$

$$\overline{y}_x - 0{,}[illegible] = [illegible]; \qquad \overline{y}_x = -0{,}7[illegible]x[illegible].$$

Уравнение регрессии **X** и **Y:** $\overline{x}_y - \overline{x} = r_B \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \overline{y})$

$$\overline{x}_y - 0{,}[illegible] = [illegible]; \qquad \overline{x}_y = -0{,}7[illegible]y[illegible].$$

2.10 Индивидуальные расчетные задания

Задание № 1 В результате проведения физико-механических исследований сплавов никеля получены следующие зависимости внутренних напряжений Р (МПа) - x_i от толщины покрытий δ (мкм) – y_i в электролитах никелирования различных составов:

X	25+A	35+A	45+A	55+A	65+A	75+A	85+A	95+A	105+A	115+A
У	14+B	18+B	19+B	20+B	23+B	23+B	24+B	26+B	29+B	34+B

где параметр А – предпоследняя цифра учебного шифра студента, параметр В равен последней цифре шифра.

По имеющимся выборочным данным *выполнить следующие действия*.

1. Вычислить выборочный коэффициент корреляции и найти выборочное уравнение линейной регрессии X на Y и Y на X:

а) методом выборочной средней; б) методом наименьших квадратов.

2. Построить график полученных зависимостей.

Задание № 2.

*Варианты 1-9.(*В таблице приведены данные по количеству внесенных удобрений X (ц/га) и урожайностью У (ц/га).

Варианты 10-1 . В таблице приведены данные по количеству предложения X (тыс. баррель) и цены У (руб. за баррель) нефти на товарной бирже.

Варианты 17-24. При исследовании влияния уровня механизации X (%) на себестоимость единицы продукции химического предприятия У (тыс. руб), были получены данные, приведенные в таблице.

Для каждого варианта необходимо:

1)вычислить выборочный коэффициент корреляции; 2)установить вероятность связи между величинами Y, X и определить уравнение линейной регрессии Y на X и X на Y.

Расчет выборочного коэффициента корреляции необходимо производить:

1. методом четырех полей;
2. используя понятие выборочного корреляционного момента (ковариации).

Необходимые расчеты могут быть осуществлены при помощи компьютерной программы Microsoft Excel

\

ВАРИАНТЫ 1-24

Вариант №1.

Y\X	10	15	20	25	30	35	n_y
15	6	4	-	-	-	-	10
25	-	6	8	-	-	-	14
35	-	-	-	21	2	5	28
45	-	-	-	4	12	6	22
55	-	-	-	-	1	5	6
n_x	6	10	8	25	15	16	80

Вариант №2.

Y\X	20	25	30	35	40	45	n_y
105	-	-	4	2	1	-	7
115	2	1	-	3	8	5	19
125	-	4	2	1	-	3	10
135	3	2	10	-	3	2	20
145	1	3	-	8	-	2	14
n_x	6	10	16	14	12	12	70

Вариант №3

Y\X	15	20	25	30	35	40	n_y
5	4	2	-	-	-	-	6
10	-	6	4	2	-	-	12
15	-	-	6	45	2	-	53
20	-	-	2	8	6	-	16
25	-	-	-	4	7	4	15
n_x	4	8	12	59	15	4	102

Вариант №4.

Y\X	10	15	20	25	30	35	n_y
15	6	4	-	-	-	-	10
25	-	6	8	-	-	-	14
35	-	-	-	20	2	5	27
45	-	-	-	5	12	6	23
55	-	-	-	-	1	5	6
n_x	6	10	8	25	15	16	80

Вариант №5.

Y\X	10	15	20	25	30	35	n_y
10	2	4	-	8	4	10	28
30	-	4	7	-	5	1	17
50	3	2	5	10	-	-	20
70	2	-	4	6	5	-	17
90	-	3	5	6	-	4	18
n_x	7	13	21	30	14	15	100

Вариант №6

Y\X	5	10	15	20	25	30	n_y
80	5	1	-	4	7	-	17
100	-	2	6	5	-	4	17
120	3	-	4	-	5	6	18
140	-	10	-	2	3	5	20
160	3	-	4	8	2	4	21
n_x	11	13	14	19	17	19	93

Вариант №7.

Y\X	12	17	22	27	32	37	n_y
105	-	4	-	3	-	-	7
115	2	3	1	-	10	-	16
125	3	-	5	1	-	4	13
135	-	-	-	8	2	1	11
145	1	2	-	-	-	-	3
n_x	6	9	6	12	12	5	50

Вариант №8.

Y\X	10	15	20	25	30	35	n_y
14	-	-	4	2	1	-	7
24	2	1	-	3	8	5	19
34	-	4	2	1	-	3	10
44	3	2	10	-	3	2	20
54	1	3	-	9	-	1	14
n_x	6	10	16	15	12	11	70

Вариант №9.

Y\X	10	15	20	25	30	35	n_y
14	1	5	-	7	-	4	17
24	2	-	4	-	6	5	17
34	-	3	5	4	6	-	18
44	10	-	2	3	-	5	20
54	2	4	-	4	8	10	28
n_x	15	12	11	18	20	24	100

Вариант №10.

Y\X	30	40	50	60	70	80	n_y
200	1	2	-	-	-	40	43
220	-	-	-	28	30	-	58
240	5	-	34	30	-	-	69
250	-	-	22	-	-	8	30
260	70	50	-	10	-	-	130
n_x	76	52	56	68	30	48	330

Вариант №11.						
Y \ X	55	62	69	76	83	90	n_y
200	-	2	-	-	-	10	12
220	-	3	-	-	15	-	18
240	-	-	5	25	8	-	38
260	8	11	-	-	2	-	21
280	5	-	-	-	-	2	7
n_x	13	16	5	25	25	12	96

Вариант №12.							
Y \ X	45	50	55	60	65	70	n_y
250	1	2	-	-	-	40	43
260	-	-	-	7	30	-	37
270	5	-	25	30	-	-	60
280	-	-	22	-	-	8	30
300	70	50	-	10	-	-	130
n_x	76	52	47	47	30	48	300

Вариант №13.							
Y \ X	52	56	60	64	68	72	n_y
255	-	2	-	-	-	10	12
265	-	3	-	-	15	-	18
275	-	-	3	25	8	-	36
285	8	11	5	-	3	-	27
295	5	-	-	-	-	2	7
n_x	13	16	8	25	26	12	100

Вариант №14.							
Y \ X	45	50	55	60	65	70	n_y
273	1	2	-	-	-	36	39
275	-	-	-	7	30	-	37
277	5	-	22	30	-	-	57
279	-	-	25	-	-	4	29
281	38	40	-	10	-	-	88
n_x	44	42	47	47	30	40	250

Вариант №15.							
Y \ X	61	65	69	73	77	80	n_y
255	-	2	-	-	-	10	12
265	-	3	-	-	15	-	18
275	-	-	3	22	8	-	33
285	5	14	5	-	6	-	30
295	5	-	-	-	-	2	7
n_x	10	19	8	22	29	12	100

Вариант №16.							
Y \ X	45	50	55	60	65	70	n_y
232	2	2	-	-	-	36	40
240	-	-	22	7	29	-	58
248	4	-	-	30	-	-	34
256	-	-	25	-	-	5	30
264	38	40	-	10	-	-	88
n_x	44	42	47	47	29	41	250

Вариант №17.							
Y \ X	30	40	50	60	70	80	n_y
232	2	3	-	-	-	36	41
240	-	-	22	7	27	-	56
248	4	-	-	32	-	-	36
256	-	-	25	-	-	4	29
264	42	36	-	10	-	-	88
n_x	48	39	47	49	27	40	250

Вариант №18.							
Y \ X	5	10	15	20	25	30	n_y
15	-	6	4	2	-	2	14
25	4	2	8	1	5	-	20
35	-	-	-	10	7	1	18
45	5	3	8	-	6	7	29
55	9	5	-	4	-	1	19
n_x	18	16	20	17	18	11	100

Вариант №19.							
Y \ X	5	10	15	20	25	30	n_y
100	-	6	4	2	-	2	14
110	4	2	8	1	5	-	20
120	-	-	-	10	7	1	18
130	5	3	8	-	6	7	29
140	9	5	-	4	-	1	19
n_x	18	16	20	17	18	11	100

Вариант №20.							
Y \ X	20	25	30	35	40	45	n_y
30	-	6	-	4	-	2	12
40	4	1	5	-	7	-	17
50	3	-	4	5	-	6	18
60	5	3	-	10	2	-	20
70	-	2	3	-	3	5	13
n_x	12	12	12	19	12	13	80

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1.Бондарь, А.Г. Математическое моделирование в химической технологии./ А.Г.Бондарь. - Киев: Высшая школа, 1973 . - 274с .
2. Кафаров, В.В.Математическое моделирование основных процессов химических производств/В.В.Кафаров, М.Б.Глебов. - М:Высшая школа,1991.- 400с.
3.. Мокриевич, А.Г., Дегтярь, Л.А. Элементы математического моделирования: учебное пособие для самостоятельной работы студентов / А.Г.Мокриевич, Л.А.Дегтярь.- пос. Персиановский : ДонГАУ, 2015, 113 с.
4. Закгейм, А.Ю. Общая химическая технология: введение в моделирование химико-технологических процессов: учебное пособие/ А.Ю. Закгейм. – М:Логос,2012.-304 с.